اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: السنة الثالثة علوم تجريبية — المدة: 3 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول(05 ن)

كيس يحوي 10 كريات لا نفرق بينها باللمس منها 3 كريات بيضاء، 6 كريات حمراء وواحدة خضراء.
نرمز للكرية البيضاء بالرمز B، وللكرية الحمراء بالرمز R وللخضراء بالرمز V.

I) نسحب من الكيس على التوالي كريتين دون ارجاع. و نعتبر الحادثتين:
A "الحصول على كرية بيضاء في السحب الثاني" و C "الحصول على كرية حمراء في السحب الاول"

1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة.
2) احسب $P(A)$، $P(A\cap C)$ و $P_A(C)$.
3) احسب $P(C)$، و استنتج هل الحادثتين A و C مستقلتين؟

II) نسحب من الكيس عشوائيا وفي آن واحد كريتين.
X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

1) عرف قانون احتمال X، واحسب الامل الرياضي $E(X)$.
2) احسب $P(X^2-4X=0)$.

التمرين الثاني:(03 ن)

في كل مما يلي توجد اجابة صحيحة واحدة، عينها مع التبرير:

1) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $-y'+2y+3=0$ والذي يحقق $f(0)=1$ هو الدالة f المعرفة ب:
أ) $f(x)=3e^x-2$ ب) $f(x)=\frac{5}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}$ ج) $f(x)=2e^{2x}-\frac{3}{2}$

2) حلول المعادلة $e^x+6e^{-x}-5=0$ في $\mathbb{R}$ هي:
أ) $f(x)=\{\ln(2),\ln(3)\}$ ب) $f(x)=\{2,3\}$ ج) $\left\{\ln(\frac{1}{2}),\ln(\frac{2}{3})\right\}$ د) $f(x)=\{e^2,e^3\}$

3) قيمة المجموع S حيث $S=\ln(\frac{1}{2})+\ln(\frac{2}{3})+\ln(\frac{3}{4})+\cdots+\ln(\frac{n-1}{n})$ هي:
أ) $S=-\ln(n-1)$ ب) $S=-\ln(n+1)$ ج) $-\ln(n)$

التمرين الثالث:(05 ن)

I) (u_n) المتتالية العددية معرفة بحدها الاول u_0 حيث $u_0=\alpha$ و من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$.
عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

II) فيما يلي نضع $u_0=0$.

1) أ) عين قيمة العدد الحقيقي b بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1+\frac{b}{u_n+3}$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $-1 < U_n \leq 0$

2) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{1}{u_n+1}$

أ) بين ان المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{2}$ و احسب حدها الاول v_0.

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب المجموع S حيث $S = \frac{8}{u_0+1} + \frac{8}{u_1+1} + \ldots + \frac{8}{u_{2024}+1}$

التمرين الرابع:(07 ن)

I) الشكل المقابل يمثل جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}+e$	↘	e

$$g(x) = (ax+b)e^{-x+2} + c$$

مع a، b و c أعداد حقيقية ثابتة.

بقراءة جدول تغيرات الدالة g

1) بين ان $a = 2$، $b = -3$ و $c = e$.

2) احسب $g(1)$، ثم استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم المتغير الحقيقي x.

II) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e(x-2) + 3 - (2x-1)e^{-x+2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين ان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f، وشكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ex + 2e] = 3$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ex - 2e + 3$

4) بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما 2 و α حيث $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

6) انشئ (T)، (Δ) و (C_f).

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $2x - 1 = (3 - 2e - m)e^{x-2}$.

8) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الاصلية للدالة $x \mapsto (2x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم من أجل $x_0 = -\frac{1}{2}$.

ب) λ عدد حقيقي حيث $\lambda > 2$، احسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 2$ و $x = \lambda$، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(05 ن)

ثلاث صناديق غير شفافة U_1، U_2 و U_3. يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كرات حمراء و ثلاث كرات بيضاء و يحتوي الصندوق U_2 على كريتين حمراوين واربع كرات بيضاء، و يحتوي الصندوق U_3 على كريتين بيضاوين و اربع كرات حمراء (كل الكرات متشابهة و لا نفرق بينها عند اللمس). نرمي زهر نرد غير مزيف ذا اربعة اوجه مرقمة من 1 الى 4
اذا ظهر الرقم 1 نسحب كريتين في آن واحد من الصندوق U_1، و إذا ظهر الرقم 2 او 3 نسحب كرتين على التوالي و دون إرجاع من الصندوق U_2 و إذا ظهر الرقم 4 نسحب كرتين على التوالي وبارجاع من الصندوق U_3 نعتبر الاحداث A، B و C المعرفة ب:
A: " سحب كرتين حمراوين "، B: " سحب كرتين بيضاوين "، C: " سحب كرتين من لونين مختلفين"

1) انجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة

2) أ) احسب احتمالات الاحداث A، B و C.

ب) علما أن الكرتين المسحوبتين حمراوان، ما إحتمال أن تكونا من الصندوق U_2

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، واحسب الامل الرياضياتي

التمرين الثاني:(04 ن)

أختر الاجابة الصحيحة في كل مايلي مع التبرير:

1) حلول المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ هي كل الدوال y حيث: (مع C ثابت حقيقي)

أ) $y(x) = \ln(2x) - \frac{1}{x} + C$ ب) $y(x) = 2\ln(x) - \frac{1}{x} + C$ ج) $y(x) = \ln(x^2) + \frac{1}{x} + C$

2) التكامل $\int_1^{\sqrt{e}} x\ln(x)dx$ يساوي

أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\sqrt{e} - 1$.

3) عدد اللجان المكونة من رئيس و نائب الممكن تشكيلها من 20 شخص هي

أ) 190 ب) 380 ج) 400.

4) المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{1}{e^{1-n}}$ هي متتالية هندسية اساسها

أ) $\frac{1}{e}$ ب) $\sqrt{e}$ ج) e

التمرين الثالث:(04 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$

1) أ) احسب الحدين u_1 و u_2.

ب) هل المتتالية (u_n) رتيبة؟ برر إجبتك.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $n \leq u_n \leq n + 3$.

ب) إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = u_n - n$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n.

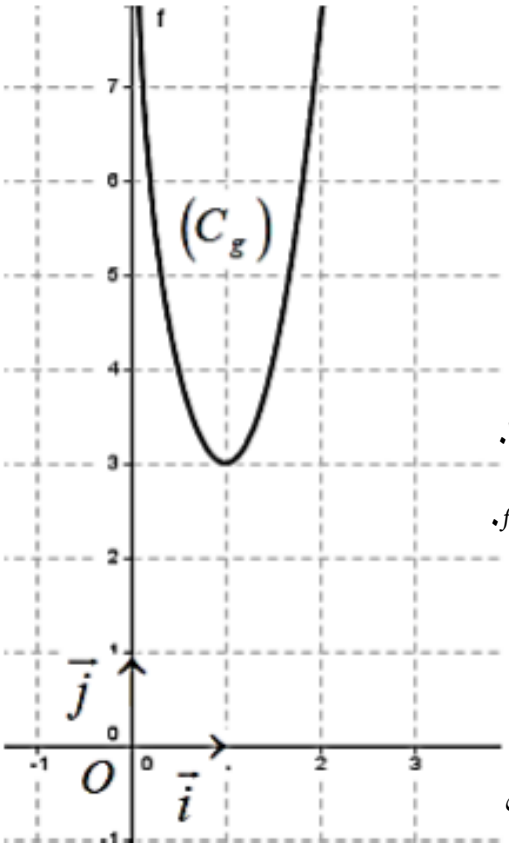
ج) عين أكبر عدد طبيعي n بحيث: $u_n \geq \frac{3}{256} + n$.

4) نضع: $S_n = \left(\frac{3}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_1 - 1}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_2 - 2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{u_n - n}\right)^2$
و $S'_n = \ln\left(\frac{u_0}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_1 - 1}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_2 - 2}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{u_n - n}{3}\right)$

- احسب S_n و S'_n بدلالة n.

التمرين الرابع:(07 ن)

في كل مايلي ينسب المستوي الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$, حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$



I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب:
$g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 3$
(C_g) تمثيلها البياني في المستوي. انظر الشكل المقابل.
علما أن g متناقصة تماما على المجال $]0;1[$
و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و بقراءة بيانية
استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:
$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$. و ليكن (C) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا.

2) أ) بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) h هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ ب: $h(x) = x - 1 + \ln x$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة h و شكل جدول تغيراتها.

ب) احسب $h(1)$، ثم إستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$،

ب) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة ل (Δ).

5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة $A(1;0)$.

6) أنشئ كلا من: (Δ) و (T)، ثم مثل المنحنى (C).

7) لتكن (d_m) المستقيمات المعرفة ب: $y = mx - m$، حيث m وسيط حقيقي.

أ) تحقق أن جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A.

ب) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة: $f(x) = mx - m$ حلان متمايزان.

8) أ) عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب $x \mapsto \frac{a+blnx}{x}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{lnx}{x^2}$.

ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C)، (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ ، $x = e$.